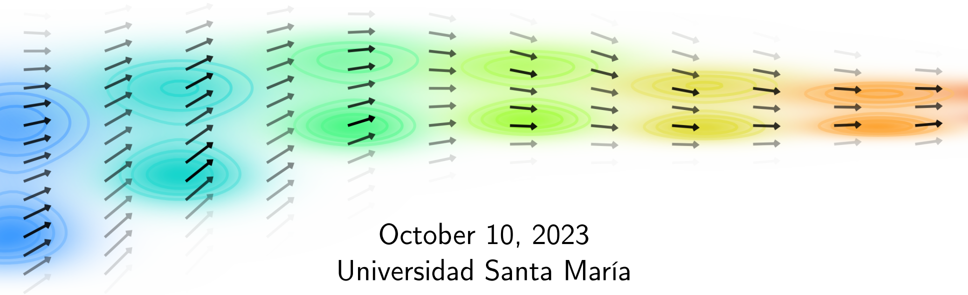
El D en EDP

Estrategías para derivación en espacios de medidas - Capítulo 3, Parte 2

Averil Prost (LMI INSA Rouen)



October 10, 2023

Universidad Santa María

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_{\mathcal{W}}(\cdot, \cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

La última vez, vimos el espacio tangente regular y la definición del gradiente de Wasserstein.

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_{\mathcal{W}}(\cdot,\cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

La última vez, vimos el espacio tangente regular y la definición del gradiente de Wasserstein.

- Permite de definir sub y supdiferenciales de manera bastante natural.

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_{\mathcal{W}}(\cdot, \cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

La última vez, vimos el espacio tangente regular y la definición del gradiente de Wasserstein.

- Permite de definir sub y supdiferenciales de manera bastante natural.
- Coincidencia con la L-diferenciabilidad cuando el gradiente existe.

Introducción y notaciones

Notamos $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{P}_2(\Omega)$ las medidas de probabilidades con segundo momento finito y $d_{\mathcal{W}}(\cdot,\cdot)$ la distancia de Kantorovitch-Rubinstein para $p = 2$, llamada *distancia de Wasserstein* en la literatura.

La última vez, vimos el espacio tangente regular y la definición del gradiente de Wasserstein.

- Permite de definir sub y supdiferenciales de manera bastante natural.
- Coincidencia con la L-diferenciabilidad cuando el gradiente existe.

Hoy vamos a ampliar la definición de espacio tangente.

Table of Contents

El espacio tangente en la naturaleza fuera de medidas

Notamos X un espacio general. De manera informal, $T_x X$ es el conjunto de direcciones que se pueden tomar para mover alrededor de $x \in X$. En espacios Euclidianos, $T_x\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$.

El espacio tangente en la naturaleza fuera de medidas

Notamos X un espacio general. De manera informal, $T_x X$ es el conjunto de direcciones que se pueden tomar para mover alrededor de $x \in X$. En espacios Euclidianos, $T_x\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$.

Def 1 Variedades ([Laf21]) Notamos $\mathcal{C}_x = \{\gamma\}$ el conjunto de curvas suaves definidas sobre $[0, \varepsilon]$ por $\varepsilon > 0$, tales que $\gamma(0) = x$,

El espacio tangente en la naturaleza fuera de medidas

Notamos X un espacio general. De manera informal, $T_x X$ es el conjunto de direcciones que se pueden tomar para mover alrededor de $x \in X$. En espacios Euclidianos, $T_x \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$.

Def 1 Variedades ([Laf21]) Notamos $\mathcal{C}_x = \{\gamma\}$ el conjunto de curvas suaves definidas sobre $[0, \varepsilon]$ por $\varepsilon > 0$, tales que $\gamma(0) = x$, y decimos que $\gamma \sim_x \overline{\gamma}$ si existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$, $x \in \mathcal{U}$, tal que

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \overline{\gamma})'(0).$$

El espacio tangente en la naturaleza fuera de medidas

Notamos X un espacio general. De manera informal, $T_x X$ es el conjunto de direcciones que se pueden tomar para mover alrededor de $x \in X$. En espacios Euclidianos, $T_x \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$.

Def 1 Variedades ([Laf21]) Notamos $\mathcal{C}_x = \{\gamma\}$ el conjunto de curvas suaves definidas sobre $[0, \varepsilon]$ por $\varepsilon > 0$, tales que $\gamma(0) = x$, y decimos que $\gamma \sim_x \overline{\gamma}$ si existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$, $x \in \mathcal{U}$, tal que

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \overline{\gamma})'(0).$$

El espacio tangente se define como $T_x X \coloneqq \mathcal{C}_x / \sim_x$.

El espacio tangente en la naturaleza fuera de medidas

Notamos X un espacio general. De manera informal, T_xX es el conjunto de direcciones que se pueden tomar para mover alrededor de $x \in X$. En espacios Euclidianos, $T_x\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$.

Def 1 Variedades ([Laf21]) Notamos $\mathcal{C}_x = \{\gamma\}$ el conjunto de curvas suaves definidas sobre $[0, \varepsilon]$ por $\varepsilon > 0$, tales que $\gamma(0) = x$, y decimos que $\gamma \sim_x \overline{\gamma}$ si existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$, $x \in \mathcal{U}$, tal que

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \overline{\gamma})'(0).$$

El espacio tangente se define como $T_xX \coloneqq \mathcal{C}_x / \sim_x$.

Siguiendo la definición por espacios menos suaves, vamos a considerar geodesicas en lugar de curvas suaves.

Aplicación exponencial

Sea $T\Omega = \bigcup_{x\in\Omega}\{x\} \times T_x\Omega$, con la norma $|(x,v)|^2 := |x|^2 + |v|^2$.

Def 2 Para cada $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$, i.e. con $\pi_x\#\xi = \mu$, notamos

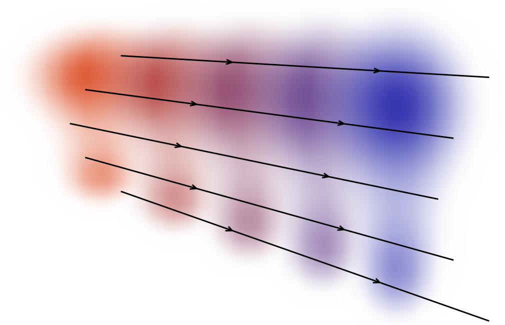
$$\exp : \mathscr{P}_2(T\Omega) \times [0,\infty), \qquad \exp_\mu(t\cdot\xi) := (\pi_x + t\pi_v)\,\#\xi.$$

Aplicación exponencial

Sea $T\Omega = \bigcup_{x\in\Omega}\{x\} \times T_x\Omega$, con la norma $|(x,v)|^2 := |x|^2 + |v|^2$.

Def 2 Para cada $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$, i.e. con $\pi_x\#\xi = \mu$, notamos

$$\exp : \mathscr{P}_2(T\Omega) \times [0,\infty), \qquad \exp_\mu(t\cdot\xi) := (\pi_x + t\pi_v)\#\xi.$$



Desintegración

El siguiente teorema se encontrá en [DM78, §70] o [Bog07, T. 10.4.12].

Sean X, Y espacios polacos, $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $r : X \to Y$ boreliano y $\nu := r\#\mu \in \mathscr{P}(Y)$.

Desintegración

El siguiente teorema se encontrá en [DM78, §70] o [Bog07, T. 10.4.12].

Sean X, Y espacios polacos, $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $r : X \to Y$ boreliano y $\nu := r\#\mu \in \mathscr{P}(Y)$. Existe una familia $\{\mu_y\}_{y\in Y} \subset \mathscr{P}(X)$, única $\nu - \mathring{\forall}\, y \in Y$, tal que para toda $f : X \to [0,\infty]$ borel,

$$\int_{x\in X} f(x)d\mu(x) = \int_{y\in Y} \left(\int_{x\in r^{-1}(y)} f(x)d\mu_y(x) \right) d\nu(y).$$

Desintegración

El siguiente teorema se encontrá en [DM78, §70] o [Bog07, T. 10.4.12].

Sean X, Y espacios polacos, $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, $r : X \to Y$ boreliano y $\nu := r\#\mu \in \mathscr{P}(Y)$. Existe una familia $\{\mu_y\}_{y\in Y} \subset \mathscr{P}(X)$, única $\nu - \mathring{\forall}\, y \in Y$, tal que para toda $f : X \to [0, \infty]$ borel,

$$\int_{x\in X} f(x)d\mu(x) = \int_{y\in Y} \left(\int_{x\in r^{-1}(y)} f(x)d\mu_y(x) \right) d\nu(y).$$

Tomamos $X = T\Omega$, $Y = \Omega$ y consideramos $r : (x, v) \mapsto x$. Entonces para cada $\xi \in \mathscr{P}_2(\Omega)_\mu$, existe una familia $(\xi_x)_x$ t.q. (notamos $\xi = \xi_x \otimes \mu$)

$$\int_{(x,v)\in T\Omega} f(x, v)d\xi(x, v) = \int_{x\in\Omega} \int_{v\in T_x\Omega} f(x, v)d\xi_x(v)d\mu(x).$$

Cono tangente general

Sean $\xi, \zeta \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$, y desintegramos $\xi = \xi_x \otimes \mu$ y $\zeta = \zeta_x \otimes \mu$. Sea

$$W_\mu^2(\xi, \zeta) := \int_{x \in \Omega} d^2_{\mathcal{W}, T_x\Omega}(\xi_x, \zeta_x) d\mu(x).$$

Cono tangente general

Sean $\xi, \zeta \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$, y desintegramos $\xi = \xi_x \otimes \mu$ y $\zeta = \zeta_x \otimes \mu$. Sea

$$W_\mu^2(\xi, \zeta) := \int_{x \in \Omega} d^2_{\mathcal{W}, T_x\Omega}(\xi_x, \zeta_x) d\mu(x).$$

Def 3 Definimos el **cono tangente Tan**$_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ en $\mu \in \mathscr{P}_2$ como

$$\overline{\left\{\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu \;\middle|\; \exists \varepsilon > 0,\ [0, \varepsilon] \mapsto \exp_\mu(t \cdot \xi) \text{ geodesica}\right\}}^{W_\mu}.$$

Cono tangente general

Sean $\xi, \zeta \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$, y desintegramos $\xi = \xi_x \otimes \mu$ y $\zeta = \zeta_x \otimes \mu$. Sea

$$W_\mu^2(\xi, \zeta) := \int_{x \in \Omega} d^2_{\mathcal{W}, T_x\Omega}(\xi_x, \zeta_x) d\mu(x).$$

Def 3 Definimos el **cono tangente Tan**$_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ en $\mu \in \mathscr{P}_2$ como

$$\overline{\left\{\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu \;\middle|\; \exists \varepsilon > 0,\ [0, \varepsilon] \mapsto \exp_\mu(t \cdot \xi) \text{ geodesica}\right\}}^{W_\mu}.$$

Ese cono "generalizado" se encuentra en [AGS05]. N. Gigli estudió las relaciones entre los diferentes conos, y mostró que **Tan**$_\mu$ es isométrico a una compleción del cociente de geodesicas por la relación "$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\gamma_{[0,\varepsilon]} = \overline{\gamma}_{[0,\varepsilon]}$" ([Gig08, Teo 4.12]).

Ejemplos (1/3)

Recordemos que

$$\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \coloneqq \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})\}}^{L^2_\mu}.$$

Ejemplos (1/3)

Recordemos que

$$\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \coloneqq \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})\}}^{L^2_\mu}.$$

Vimos que por cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$t \mapsto \exp_\mu(t \cdot \nabla\varphi \# \mu) = (\pi_x + t\nabla\varphi)\,\#\mu$$

sigue una geodesica sobre $[0,\varepsilon]$.

Ejemplos (1/3)

Recordemos que

$$\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \coloneqq \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})\}}^{L^2_\mu}.$$

Vimos que por cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$t \mapsto \exp_\mu(t \cdot \nabla\varphi \# \mu) = (\pi_x + t\nabla\varphi) \# \mu$$

sigue una geodesica sobre $[0,\varepsilon]$. Además, por cada $T, \overline{T} \in L^2_\mu$, tenemos

$$W_\mu^2 \left(T\#\mu, \overline{T}\#\mu\right) = \int_{x\in\Omega} d^2\left(T(x), \overline{T}(x)\right) d\mu = \|T - \overline{T}\|^2_{L^2_\mu}.$$

Ejemplos (1/3)

Recordemos que

$$\mathsf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \coloneqq \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})\}}^{L^2_\mu}.$$

Vimos que por cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$t \mapsto \exp_\mu(t \cdot \nabla\varphi\#\mu) = (\pi_x + t\nabla\varphi)\#\mu$$

sigue una geodesica sobre $[0,\varepsilon]$. Además, por cada $T, \overline{T} \in L^2_\mu$, tenemos

$$W_\mu^2\left(T\#\mu, \overline{T}\#\mu\right) = \int_{x\in\Omega} d^2\left(T(x), \overline{T}(x)\right) d\mu = \|T - \overline{T}\|^2_{L^2_\mu}.$$

Entonces

$$\{T\#\mu \mid T \in \mathsf{Tan}_\mu\mathscr{P}_2(\Omega)\} \subset \mathbf{Tan}_\mu\mathscr{P}_2(\Omega).$$

Ejemplos (2/3)

Si $\mu = \delta_x$ es una masa de Dirac, $\Gamma_o(\mu, \nu) = \Gamma(\mu, \nu) = \{\mu \times \nu\}$ para cada $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

Ejemplos (2/3)

Si $\mu = \delta_x$ es una masa de Dirac, $\Gamma_o(\mu,\nu) = \Gamma(\mu,\nu) = \{\mu \times \nu\}$ para cada $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Entonces

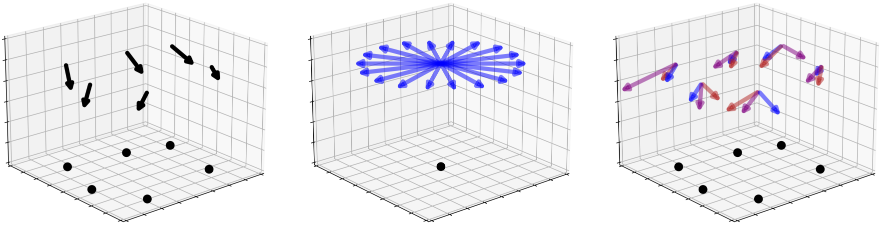
$$\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) = \{\delta_x \times \xi \mid \xi \in \mathscr{P}_2(T_x\Omega)\}\,.$$

Ejemplos (2/3)

Si $\mu = \delta_x$ es una masa de Dirac, $\Gamma_o(\mu, \nu) = \Gamma(\mu, \nu) = \{\mu \times \nu\}$ para cada $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Entonces

$$\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) = \{\delta_x \times \xi \mid \xi \in \mathscr{P}_2(T_x\Omega)\}.$$

Se puede generalizar a medidas con átomos suficiamente espaciados.



Ejemplos (3/3)

La compleción no se puede remover sin cambiar la definición.

Por ejemplo, si A, B, C, D son las esquinas de un rectángulo con $|A - C| = \frac{1}{2}|B - D|$,

$$\mu = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[A,B]} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[B,C]}$$

y por $P \perp (B - A)$ que apunta a C, $Q \perp B - C$ que apunta a A,

$$\xi = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[A,B]\otimes P} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[B,C]\otimes Q}$$

son tales que $\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, pero no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\pi_x, \pi_x + \varepsilon\pi_v)\#\xi$ sea un plano de transporte óptimo.

Table of Contents

Espacio

Por definición, si $\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, entonces

$$\alpha \cdot \xi := (\pi_x, \alpha\pi_v)\#\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \qquad \forall \alpha \geqslant 0.$$

Espacio

Por definición, si $\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, entonces

$$\alpha \cdot \xi := (\pi_x, \alpha\pi_v)\#\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \qquad \forall \alpha \geqslant 0.$$

[Gig08, Prop 4.29] Si $\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, luego $-\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.

Espacio

Por definición, si $\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, entonces

$$\alpha \cdot \xi := (\pi_x, \alpha \pi_v)\#\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \qquad \forall \alpha \geqslant 0.$$

[Gig08, Prop 4.29] Si $\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, luego $-\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.

En el caso $\mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, es facil de ver que

$$-T = -\overset{L^2_\mu}{\lim_{n\to\infty}} \nabla\varphi_n = \overset{L^2_\mu}{\lim_{n\to\infty}} - \nabla\varphi_n \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega).$$

Espacio

Por definición, si $\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, entonces

$$\alpha \cdot \xi := (\pi_x, \alpha \pi_v) \# \xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega) \qquad \forall \alpha \geqslant 0.$$

[Gig08, Prop 4.29] Si $\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, luego $-\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.

En el caso $\text{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, es facil de ver que

$$-T = -\overset{L^2_\mu}{\lim_{n\to\infty}} \nabla \varphi_n = \overset{L^2_\mu}{\lim_{n\to\infty}} - \nabla \varphi_n \in \text{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega).$$

En el caso general, demostración nada trivial.

Convexidad

[Gig08, Prop 4.25] Sean $\xi_1, \xi_2 \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, y

$\alpha \in \mathscr{P}\left\{(x, v_1, v_2) \mid x \in \Omega, v_i \in T_x\Omega\right\}$ tal que $(\pi_x, \pi_{v_i})\#\alpha = \xi_i$.

Convexidad

[Gig08, Prop 4.25] Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, y

$\alpha \in \mathscr{P}\{(x, v_1, v_2) \mid x \in \Omega, v_i \in T_x\Omega\}$ tal que $(\pi_x, \pi_{v_i})\#\alpha = \xi_i$.

Entonces

$$\xi_1 \oplus_\alpha \xi_2 \coloneqq (\pi_x, \pi_{v_1} + \pi_{v_2})\#\alpha \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega).$$

Convexidad

[Gig08, Prop 4.25] Sean $\xi_1, \xi_2 \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, y

$\alpha \in \mathscr{P}\{(x, v_1, v_2) \mid x \in \Omega, v_i \in T_x\Omega\}$ tal que $(\pi_x, \pi_{v_i})\#\alpha = \xi_i$.

Entonces

$$\xi_1 \oplus_\alpha \xi_2 := (\pi_x, \pi_{v_1} + \pi_{v_2})\#\alpha \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega).$$

Idea del argumento:

- por continuidad y densidad, es suficiente de considerar el caso en que $s \mapsto \exp_\mu(s \cdot \xi_i)$ son geodesicas sobre $[0, \varepsilon]$.

Convexidad

[Gig08, Prop 4.25] Sean $\xi_1, \xi_2 \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, y

$\alpha \in \mathscr{P}\{(x, v_1, v_2) \mid x \in \Omega, v_i \in T_x\Omega\}$ tal que $(\pi_x, \pi_{v_i})\#\alpha = \xi_i$.

Entonces

$$\xi_1 \oplus_\alpha \xi_2 := (\pi_x, \pi_{v_1} + \pi_{v_2})\#\alpha \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega).$$

Idea del argumento:

- por continuidad y densidad, es suficiente de considerar el caso en que $s \mapsto \exp_\mu(s \cdot \xi_i)$ son geodesicas sobre $[0, \varepsilon]$.
- Pasando a la representación con planos, es suficiente mostrar que cada combinación convexa de planos óptimos es óptima para $s \in [0, \varepsilon/2]$.

Convexidad

[Gig08, Prop 4.25] Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$, y

$\alpha \in \mathscr{P}\{(x, v_1, v_2) \mid x \in \Omega, v_i \in T_x\Omega\}$ tal que $(\pi_x, \pi_{v_i})\#\alpha = \xi_i$.

Entonces

$$\xi_1 \oplus_\alpha \xi_2 := (\pi_x, \pi_{v_1} + \pi_{v_2})\#\alpha \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega).$$

Idea del argumento:

- por continuidad y densidad, es suficiente de considerar el caso en que $s \mapsto \exp_\mu(s \cdot \xi_i)$ son geodesicas sobre $[0, \varepsilon]$.
- Pasando a la representación con planos, es suficiente mostrar que cada combinación convexa de planos óptimos es óptima para $s \in [0, \varepsilon/2]$.
- Eso se hace con el criterio de monotonicidad cíclica.

...y tutti quanti

[Gig08, Teo. 4.15] Sea $\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$. Entonces su **promedio**

$$b_\xi \in L^2_\mu\left(\Omega; T\Omega\right), \qquad b_\xi(x) := \int_{v \in T_x\Omega} v d\xi(x,v)$$

pertenece a $\mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.

...y tutti quanti

[Gig08, Teo. 4.15] Sea $\xi \in \textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$. Entonces su **promedio**

$$b_\xi \in L^2_\mu\left(\Omega; T\Omega\right), \qquad b_\xi(x) := \int_{v \in T_x\Omega} v d\xi(x, v)$$

pertenece a $\text{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$.

[Gig08, Teo 4.19] Un elemento $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$ pertenece a $\textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ si y sólo si se cumple la igualdad

$$\|\xi\|_\mu := W_\mu(\xi, 0\#\mu) = \lim_{h \searrow 0} \frac{d_{\mathcal{W}}(\exp_\mu(h \cdot \xi), \mu)}{h}.$$

Bajo esta igualdad subyace el hecho que ξ no contiene información inútil.

Table of Contents

Definiciones en el caso general

Para cualquier $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$ y $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, notamos

$$\Gamma_o(\xi, \nu) := \left\{ \eta \in \mathscr{P}_2\{(x, v_1, v_2)\} \;\middle|\; \begin{array}{c} \pi_{x,v_1}\#\eta = \xi, \\ (\pi_x, \pi_x + \pi_{v_2})\#\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu) \end{array} \right\}.$$

Definiciones en el caso general

Para cualquier $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$ y $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, notamos

$$\Gamma_o(\xi, \nu) := \left\{ \eta \in \mathscr{P}_2\{(x, v_1, v_2)\} \;\middle|\; \begin{array}{c} \pi_{x,v_1}\#\eta = \xi, \\ (\pi_x, \pi_x + \pi_{v_2})\#\eta \in \Gamma_o(\mu, \nu) \end{array} \right\}.$$

Def 4 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Un $\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ pertenece al **subdiferencial** de u en μ, denotado $\boldsymbol{\partial}.u(\mu)$, si para toda $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\xi, \nu)$, se cumple

$$u(\nu) - u(\mu) \geqslant \int_{(x,v_1,v_2)} \langle v_1, v_2 \rangle \, d\eta(x, v_1, v_2) + o\left(d_{\mathcal{W}}(\nu, \mu)\right).$$

Definiciones en el caso general

Para cualquier $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$ y $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, notamos

$$\Gamma_o(\xi,\nu) \coloneqq \left\{ \eta \in \mathscr{P}_2\{(x,v_1,v_2)\} \;\middle|\; \begin{array}{c} \pi_{x,v_1}\#\eta = \xi, \\ (\pi_x, \pi_x + \pi_{v_2})\#\eta \in \Gamma_o(\mu,\nu) \end{array} \right\}.$$

Def 4 Sean $u : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$. Un $\xi \in \mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ pertenece al **subdiferencial** de u en μ, denotado $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\cdot}} u(\mu)$, si para toda $\nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\eta \in \Gamma_o(\xi,\nu)$, se cumple

$$u(\nu) - u(\mu) \geqslant \int_{(x,v_1,v_2)} \langle v_1, v_2 \rangle \, d\eta(x,v_1,v_2) + o\left(d_{\mathcal{W}}(\nu,\mu)\right).$$

El superdiferencial $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\cdot}} u$ se define de manera análoga.

Ejemplo (1/2)

Para $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, notamos

$$\exp_\mu^{-1}(\nu) := \{\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu \mid (\pi_x, \pi_x + \pi_v)\#\xi \in \Gamma_o(\mu, \nu)\}.$$

Entonces $h \mapsto \exp_\mu(h \cdot \xi)$ sigue una geodesica entre μ y ν.

Ejemplo (1/2)

Para $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, notamos

$$\exp_\mu^{-1}(\nu) := \{\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu \mid (\pi_x, \pi_x + \pi_v)\#\xi \in \Gamma_o(\mu, \nu)\}.$$

Entonces $h \mapsto \exp_\mu(h \cdot \xi)$ sigue una geodesica entre μ y ν.

[Gig08, (2.16)] Para $\xi \in \exp_\mu^{-1}(\nu)$, tenemos la **semiconcavidad**

$$d_{\mathcal{W}}^2(\exp_\mu(h\xi), \sigma) \geqslant (1-h)d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma) + hd_{\mathcal{W}}^2(\nu, \sigma) - h(1-h)d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu).$$

Ejemplo (1/2)

Para $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\Omega)$, notamos

$$\exp_\mu^{-1}(\nu) := \{\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu \mid (\pi_x, \pi_x + \pi_v)\#\xi \in \Gamma_o(\mu, \nu)\}.$$

Entonces $h \mapsto \exp_\mu(h \cdot \xi)$ sigue una geodesica entre μ y ν.

[Gig08, (2.16)] Para $\xi \in \exp_\mu^{-1}(\nu)$, tenemos la **semiconcavidad**

$$d_{\mathcal{W}}^2(\exp_\mu(h\xi), \sigma) \geqslant (1-h)d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma) + hd_{\mathcal{W}}^2(\nu, \sigma) - h(1-h)d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \nu).$$

Se tiene de la identidad de espacios de Hilbert

$$|x + hv - y|^2 = (1-h)|x-y|^2 + h|x+v-y|^2 - h(1-h)|v|^2,$$

junto con una aproximación de $\Gamma(\exp_\mu(h \cdot \xi), \sigma)$.

Ejemplo (2/2)

Consideramos $u(\mu) := d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$ para $\sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

[Gig08, Prop 4.10] Sean $\mu, \sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$.

$$\frac{d}{dh}_{|h=0} u\left(\exp_\mu(h \cdot \xi)\right) = \inf_{\eta \in \Gamma_o(\xi, \sigma)} \int \frac{d}{dt}_{|t=0} d^2(x + tv_1, x + v_2) d\eta$$

Ejemplo (2/2)

Consideramos $u(\mu) := d_{\mathcal{W}}^2(\mu, \sigma)$ para $\sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

[Gig08, Prop 4.10] Sean $\mu, \sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}_{|h=0} u\left(\exp_\mu(h \cdot \xi)\right) &= \inf_{\eta \in \Gamma_o(\xi,\sigma)} \int \frac{d}{dt}_{|t=0} d^2(x + tv_1, x + v_2) d\eta \\ &= \inf_{\eta \in \Gamma_o(\xi,\sigma)} \int_{(x,v_1,v_2)} -2\left\langle v_1, v_2\right\rangle d\eta(x, v_1, v_2).\end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

Consideramos $u(\mu) := d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$ para $\sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

[Gig08, Prop 4.10] Sean $\mu, \sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$.

$$\frac{d}{dh}_{|h=0} u\left(\exp_\mu(h \cdot \xi)\right) = \inf_{\eta \in \Gamma_o(\xi,\sigma)} \int \frac{d}{dt}_{|t=0} d^2(x + tv_1, x + v_2) d\eta$$

$$= \inf_{\eta \in \Gamma_o(\xi,\sigma)} \int_{(x,v_1,v_2)} -2 \langle v_1, v_2 \rangle \, d\eta(x, v_1, v_2).$$

Remark La última vez, vimos que para cada $T \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$,

$$\sup_{\eta \in \exp_\mu^{-1}(\sigma)} \int \langle T(x), v \rangle \, d\eta = \inf_{\eta \in \exp_\mu^{-1}(\sigma)} \int \langle T(x), v \rangle \, d\eta + o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)\right).$$

Ejemplo (2/2)

Consideramos $u(\mu) := d^2_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)$ para $\sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$.

[Gig08, Prop 4.10] Sean $\mu, \sigma \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ y $\xi \in \mathscr{P}_2(T\Omega)_\mu$.

$$\frac{d}{dh}_{|h=0} u\left(\exp_\mu(h \cdot \xi)\right) = \inf_{\eta \in \Gamma_o(\xi,\sigma)} \int \frac{d}{dt}_{|t=0} d^2(x + tv_1, x + v_2) d\eta$$

$$= \inf_{\eta \in \Gamma_o(\xi,\sigma)} \int_{(x,v_1,v_2)} -2 \langle v_1, v_2 \rangle \, d\eta(x, v_1, v_2).$$

Remark La última vez, vimos que para cada $T \in \mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$,

$$\sup_{\eta \in \exp_\mu^{-1}(\sigma)} \int \langle T(x), v \rangle \, d\eta = \inf_{\eta \in \exp_\mu^{-1}(\sigma)} \int \langle T(x), v \rangle \, d\eta + o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)\right).$$

Se entiente como $|D_\mu u(T\#\mu) - (-D_\mu u(-T\#\mu))| \leqslant o\left(d_{\mathcal{W}}(\mu, \sigma)\right)$.

Observaciones

- ¿Vínculos entre subdiferenciales débiles y fuertes en el caso general?

Observaciones

- ¿Vínculos entre subdiferenciales débiles y fuertes en el caso general?
- Según el teorema de Benamou-Brenier, cualquier curva absolutamente continua tiene una derivada débil en $\mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ para casi todo tiempo, entonces varias autores no consideran $\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ como interesante.

Observaciones

- ¿Vínculos entre subdiferenciales débiles y fuertes en el caso general?
- Según el teorema de Benamou-Brenier, cualquier curva absolutamente continua tiene una derivada débil en $\mathrm{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ para casi todo tiempo, entonces varias autores no consideran $\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ como interesante.
- En general, mucho menos trabajo sobre $\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$ (salvo los esfuerzos de Gigli).

Continuará

Esta parte

- definición y propiedades del espacio tangente general

Continuará

Esta parte

- definición y propiedades del espacio tangente general
- definiciones de sub/supdiferenciales usando $\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$

Continuará

Esta parte

- definición y propiedades del espacio tangente general
- definiciones de sub/supdiferenciales usando $\textbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$

Vimos al inicio que hay clases de ecuaciones que solamente necesitan $|\nabla u|$.

Continuará

Esta parte

- definición y propiedades del espacio tangente general
- definiciones de sub/supdiferenciales usando $\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$

Vimos al inicio que hay clases de ecuaciones que solamente necesitan $|\nabla u|$.

El próximo capítulo

- medir las variaciones en espacios métricos

Continuará

Esta parte

- definición y propiedades del espacio tangente general
- definiciones de sub/supdiferenciales usando $\mathbf{Tan}_\mu \mathscr{P}_2(\Omega)$

Vimos al inicio que hay clases de ecuaciones que solamente necesitan $|\nabla u|$.

El próximo capítulo

- medir las variaciones en espacios métricos
- vínculo con las definiciones de gradientes.

¡Gracias!

[AGS05] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Guiseppe Savaré.
Gradient Flows.
Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser-Verlag, Basel, 2005.

[Bog07] Vladimir I. Bogachev.
Measure Theory.
Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[DM78] Claude Dellacherie and Paul André. Meyer.
Probabilities and Potential.
Hermann ; North-Holland Pub. Co. ; Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North-Holland, Paris, Amsterdam, New York, 1978.

[Gig08] Nicola Gigli.
On the Geometry of the Space of Probability Measures Endowed with the Quadratic Optimal Transport Distance.
PhD thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 2008.

[Laf21] Jacques Lafontaine.
Introduction aux variétés différentielles.
In *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, February 2021.